

5

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a V – a

V

SUBIECTE:

1. Se dă numerele

$$x = 624 \cdot 57 - 45 \cdot 624 + 12 + 625 \cdot 13$$

$$y = (8^{17} \cdot 4^5 : 2^{60} + 3^{100} : 27^{33} \cdot 9)^{2024} : 29^{2023} + 1^{2024} + 2024^0 - 28$$

- a) Arătați că x este pătrat perfect și cub perfect; (3p)
 b) Comparați x^{11} cu 2^{51y+1} . (4p)

2. Determinați n astfel încât suma cifrelor numărului $A = \underbrace{555 \dots 5}_{n \text{ cifre}} \cdot 2020$ să fie 2024.

(G.M.) (7p)

3. Fie numerele $\overline{x_1x_2 \dots x_m} = 2^{1000} \cdot 5^{1023}$ și $\overline{y_1y_2 \dots y_n} = 2^{1023} \cdot 5^{1000}$. Calculați $m + n$.

(7p)

4. La un turneu de tenis participă n jucători.

- a) Dacă turneul se organizează în sistem campionat, în care fiecare joacă un meci cu ceilalți $n - 1$ jucători, aflați câte meciuri se joacă în total, dacă $n = 16$; (4p)
 b) Dacă turneul se organizează în sistem eliminatoriu (se trag la sorți meciurile înaintea fiecărui tur și se califică în următorul tur învingătorul din fiecare meci; în situația în care înaintea unui tur este un număr impar de jucători, unul dintre ei se califică fără să joace), aflați n știind că în total se joacă 23 de meciuri. (3p)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.

Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.

Timp de lucru: 3 ore.

6

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a VI – a

VI

SUBIECTE:

1. a) Știind că $\frac{x}{x+2} = \frac{y}{y+4}$, determinați $\frac{x}{y}$. (3p)

b) Determinați numerele naturale x, y, z, t , știind că sunt adevărate relațiile:
 $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 3000$ și $\frac{x}{x+2} = \frac{y}{y+4} = \frac{z}{z+6} = \frac{t}{t+8}$. (4p)

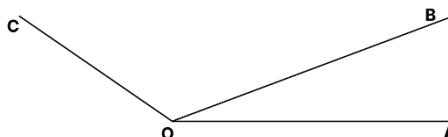
2. a) Fie a și b numere naturale nenule, astfel încât $a|a \cdot b + b$ și $b|a \cdot b + a$. Arătați că $a = b$. (3p)

b) Numerele naturale nenule x și y au proprietatea că numărul $x^{2023} + x + y^2$ este divizibil cu xy . Demonstrați că x este pătrat perfect. (4p)

3. În figura de mai jos, unghiurile AOB și AOC sunt neadiacente suplementare. Știind că suplementul unghiului AOC reprezintă jumătate din complementul unghiului AOB , calculați:

a) Măsura unghiului AOB (4p)

b) Dacă $[OD]$ este bisectoarea unghiului AOB , iar semidreapta OR este semidreaptă opusă semidreptei OC , calculați măsura unghiului ROD . (3p)



4. Pe cercul $C(O, r)$ se consideră punctele A, B, M, P, Q, S , astfel încât AB este diametru, M, P, Q situate pe aceeași parte a dreptei AB , P între M și Q , iar S de cealaltă parte a dreptei AB , astfel încât $\widehat{AM} \equiv \widehat{PQ} \equiv \widehat{BS} = 60^\circ$. Punctul N este situat pe arcul mic AS , astfel încât unghiurile AON și POQ sunt complementare.

a) Arătați că dreptele ON și MS sunt perpendiculare. (3p)

b) Dacă în plus, $\angle POM = 5 \cdot \angle BOQ$, iar T un punct situat pe arcul mic SN , astfel încât $\angle BOQ \equiv \angle SOT$, arătați că dreapta PO împarte arcul mic TN în două arce congruente. (4p)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.

Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.

Timp de lucru: 3 ore.

7

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a VII – a

✓

SUBIECTE:

1. Se consideră mulțimea $A = \left\{ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}}, \dots, \frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2023}}{\sqrt{2023}\cdot\sqrt{2024}} \right\}$.
 - Calculați suma elementelor mulțimii A . (3p)
 - Arătați că există cel puțin 946 de submulțimi ale mulțimii A , pentru care suma elementelor fiecărei submulțimi să fie un număr rațional. (4p)
2. Aflați numerele $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, știind că $x + \frac{1}{y} = 2$, $y + \frac{1}{z} = 3$ și $xyz = 1$. (7p)
3. În patrulaterul convex ABCD, O este punctul de intersecție al diagonalelor, $OA = 3OC$, $OB = OD$ și unghiul A are măsura mai mică de 60° .
 - Dacă E este mijlocul diagonalei AC, demonstrați că patrulaterul BEDC este paralelogram. (2p)
 - Demonstrați că patrulaterul ABCD poate avea cel mult un unghi drept. (5p)
4. Laturile opuse AB și CD ale patrulaterului ABCD se întâlnesc în E, iar AD și BC în F. Se iau pe prelungirile laturilor AB, DC, BC și AD, segmentele $EH = AB$, $EK = CD$, $FL = BC$ și $FM = DA$, astfel încât $E \in (AH)$ și $E \in (DK)$, iar $F \in (AM)$ și $F \in (BL)$. Să se demonstreze că patrulaterul HKLM este paralelogram. (7p)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.

Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.

Timp de lucru: 3 ore.

8

**Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a VIII – a**

✓

SUBIECTE:

1. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC , $\angle BAC = 90^\circ$, $AC = 2\sqrt{6} \text{ cm}$. Pe planul (ABC) se ridică de aceeași parte perpendiculararele AD și CE , astfel încât $AD = 6 \text{ cm}$ și $CE = 4 \text{ cm}$. Arătați că dreapta CD este perpendiculară pe planul (BAE) .

(7p)

2. a) Arătați că, pentru orice numere $x, y > 0$, are loc inegalitatea: $\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy}$.

(3p)

b) Arătați că, pentru orice numere $a, b, c > 0$, are loc inegalitatea :

$$3 + 2\left(\frac{a}{\sqrt{bc}} + \frac{b}{\sqrt{ca}} + \frac{c}{\sqrt{ab}}\right) \leq (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

(4p)

3. Se consideră mulțimile:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 + y^2 \leq 20x - 22y\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 + y^2 \leq 10y - 28x\}$$

Determinați mulțimea $A \cap B$.

(7p)

4. Pe planul paralelogramului $ABCD$ se construiește perpendiculara VO , $\{O\} = AC \cap BD$.

Pe segmentele AB , BC , respectiv, VO , există punctele M, N , respectiv, P astfel încât $MP \perp (VCD)$ și $NP \perp (VAD)$. Demonstrați că $ABCD$ este romb.

(7p)

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.

Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.

Timp de lucru: 3 ore.